



МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ

9 - 12 КЛАС

ЕСЕН 2018

УКАЗАНИЯ

1. Моля не отваряйте теста преди квесторът да е дал разрешение.
2. Тестът съдържа 20 задачи със свободен отговор.
3. В листа за отговори трябва да запишете отговора.
4. Всеки правилен отговор на задачите се оценява с 2 точки, ако отговорът е непълен – с 1 точка, ако отговорът е грешен или не е посочен – 0 точки.
5. Забранено е използването на калкулатори, телефони или други електронни устройства, учебници и справочници с формули.
6. Времето за работа по задачите е 60 минути. При равен брой точки по-напред в класирането е този ученик, който е изразходвал по-малко време за решаването на задачите.
7. Забранено е изнасянето на тестовете и черновите на състезателите.
8. По време на състезанието не се допуска чужда помощ от квестора или друго лице. Самостоятелната и честна работа е главното изискване на организаторите към участниците в турнира.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХ!

ДЕКЛАРАЦИЯ

Доброволно предоставям и давам своето съгласие администраторите на лични данни, обработващи лични данни при фондация „Математика без граници“ и „Инвариант М“ да обработва личните ми данни/личните данни на детето ми за 6-то издание на турнира през 2018-2019 г.: трите имена, клас, училище, населено място, точки от състезание, награда, като на електронната страница на турнира бъдат публикувани само имената ми, града, класа и наградата. Запознат/а съм с целите на обработване на личните ми данни/личните данни на детето ми.

За ученика:
(Трите имена на ученика)

Клас:....., училище населено място:.....

Родител:..... Подпис:.....

Родител:..... Подпис:

Дата: 2018 г.

Аритметика и алгебра

Задача 1. Кое е най-малкото просто число, което дели числото равно на

$$3^{20} + 11^{18}?$$

Задача 2. Кое е простото число P , за което $(P + 64)$ е точен квадрат на естествено число?

Задача 3. Нека положителните числа x и y , са такива, че

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right) \times \left(y + \frac{1}{y}\right) = 4\sqrt{2}.$$

Да се пресметне цялата част на $x - y$.

(Упътване: Ако a и b са неотрицателни числа, тогава е изпълнено неравенството $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.)

Задача 4. Уравнението $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ има двукратен корен 2. Пресметнете сбора на трите му корена.

Задача 5. Ако $\frac{x}{2x^2+9x+2} = \frac{1}{3}$, да се пресметне $x^5 - 55x - 21$.

Логически задачи

Задача 6. Няколко различни естествени числа са записани на дъската. Точно две от тях се делят на 3 и точно 11 от тях се делят на 11. Ако M е най-голямото от записаните числа, намерете възможно най-малката стойност на M .

Задача 7. Нека a и b са съответно цялата и дробната част на $\sqrt{7}$. Пресметнете цялата част на $a \div b$.

Задача 8. Нека Q е рационално число, по-малко от 10, а I е ирационално число по-голямо от 10. Ако произведението $(Q \times I)$ е рационално число, пресметнете колко са възможните стойности на частното $(Q \div I)$?

Задача 9. За колко цели числа x е изпълнено неравенството

$$\frac{x - 2}{\sqrt{x + 2}} \leq 0?$$

Задача 10. Напишете уравнението на права, която е перпендикулярна на абсцисната ос и върху нея е точката с координата $(1, 2018)$.

Геометрия

Задача 11. От 4 еднакви кубчета е образуван правоъгълен паралелепипед. Повърхнината на всяко кубче е 2 cm^2 . Намерете лицето на повърхнината на правоъгълния паралелепипед.

Задача 12. Даден е трапец $ABCD$ (AB е малката основа). Точката X е среда на бедрото AD и $\sphericalangle CXB = 90^\circ$. Ако височината на трапеца е 4 cm , а бедрото BC е 6 cm , да се пресметне колко квадратни сантиметра е лицето на трапеца?

Задача 13. Даден е правоъгълник със страни 6 cm и 11 cm . Ъглополовящите на ъглите, прилежащи на една от по-дългите страни, разделят срещуположната страна на три части. Намерете дължините в сантиметри на най-малката от тези три части.

Задача 14. Стените на куб с ръб 8 cm били боядисани, след което кубът бил нарязан на кубчета с ръб 1 cm . Колко от малките кубчета имат поне една боядисана стена?

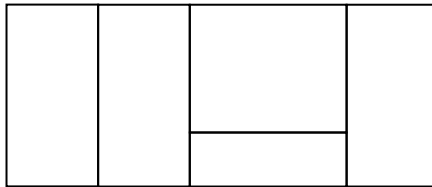
Задача 15. Даден е правоъгълен триъгълник със страни 6 cm , 8 cm , 10 cm . С колко сантиметра радиуса на описаната окръжност е по-голям от радиуса на вписаната окръжност?

Комбинаторика

Задача 16. Колко е броят на десетцифрените числа със сбор на цифрите 2?

Задача 17. Сборът на шест нечетни естествени числа е 20. Колко е най-малката възможна разлика на най-голямото и най-малкото от тези числа?

Задача 18. Фигурата на чертежа е съставена от 5 правоъгълника. Трябва да ги оцветим с 5 цвята като всеки два съседни правоъгълника не са оцветени в един и същ цвят. По колко начина можем да направим оцветяването, като не е задължително да използваме всички цветове?



Задача 19. Трима души разпределили помежду си наличните няколко плода с различни тегла така, че всички получили равни тегла плод без нарушаване целостта на плодовете. Към тримата се присъединили още двама и се наложило ново разпределение, при което всички отново получили равни тегла плод без нарушаване целостта на плодовете. Колко броя най-малко са били наличните плодове?

Задача 20. Разглеждаме числата

$$a_1, a_2, a_1 \times a_2, a_3, a_4, a_3 \times a_4, \dots, a_{2017}, a_{2018}, a_{2017} \times a_{2018}.$$

Колко най-много са отрицателните сред тези числа?