



МАТЕМАТИКА БЕЗ ГРАНИЦИ

9-12 КЛАС

ПРОЛЕТ 2019

УКАЗАНИЯ

1. Моля не отваряйте теста преди квесторът да е дал разрешение.
2. Тестът съдържа 20 задачи със свободен отговор.
3. В листа за отговори трябва да запишете отговора.
4. Всеки правилен отговор на задачите се оценява с 2 точки, ако отговорът е непълен – с 1 точка, ако отговорът е грешен или не е посочен – 0 точки.
5. Забранено е използването на калкулатори, телефони или други електронни устройства, учебници и справочници с формули.
6. Времето за работа по задачите е 60 минути. При равен брой точки по-напред в класирането е този ученик, който е изразходвал по-малко време за решаването на задачите.
7. Забранено е изнасянето на тестовете и черновите на състезателите.
8. По време на състезанието не се допуска чужда помощ от квестора или друго лице. Самостоятелната и честна работа е главното изискване на организаторите към участниците в турнира.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХ!

Задача 1. Пресметнете произведението на x , y и z , ако

$$\begin{cases} 2^x = 3 \\ 3^y = 5 \\ 5^z = 0,25. \end{cases}$$

Задача 2. Два от корените на уравнението $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (където a и b са реални параметри) са числата 1 и 2. Да се пресметне сборът на другите два корена.

Задача 3. Да се пресметне $A - B$, ако

$$\sqrt{A^2 + 2A + 2} + \sqrt{B^2 + 4B + 5} = 2.$$

Задача 4. Естествените числа от 1 до 25 са записани на картички. Най-малко колко картички трябва да вземем без да гледаме, така че със сигурност сред тях да има 2, чието произведение се дели на 10?

Задача 5. Да се пресметне израза $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 \times (1 + \sqrt{3})} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 \times (1 + \sqrt{2})}$.

Задача 6. За колко цели числа a и двата корена на квадратното уравнение

$$a^2x^2 + (a^2 - 4)x + a^2 = 0$$

са положителни числа?

Задача 7. Колко са всички естествени числа n , за които точно едно от числата n и $n + 2019$ е четирицифрено?

Задача 8. Нека $ABCD$ е трапец (AB и CD са основи, $AB < CD$). Окръжността, описана около триъгълник ABC , се допира до AD . Ако $AC = 6$ cm и $AB = 4$ cm, да се пресметне в сантиметри дължината на основата CD .

Задача 9. Триъгълник ABC е равнобедрен ($AC = BC$). Ако AL ($L \in BC$) е ъглополовяща на $\sphericalangle CAB$ и $AC + CL = AB$, да се пресметне колко градуса е $\sphericalangle CBA$.

Задача 10. Две от страните на триъгълник имат дължини съответно $\sqrt{2}$ cm и $\sqrt{3}$ cm. От височините, спуснати към тях, едната е с 2 cm по-дълга от другата. Да се намери лицето на триъгълника в квадратни сантиметри.

Задача 11. Външно за успоредника $ABCD$ с $\angle BAD = 30^\circ$ и лице 10 cm^2 са построени равностранните $\triangle ADM$ и $\triangle DCN$. Колко квадратни сантиметра е лицето на $\triangle MDN$?

Задача 12. Спрямо правоъгълна координатна система върховете на триъгълника ABC имат координати: $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(1;6)$. Да се намерят абсцисата и ординатата на медицентъра на триъгълника.

Задача 13. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 - 7x + 3 = 0$, да се пресметне

$$\frac{5x_1}{x_1^2 + 3} + \frac{2x_2}{x_2^2 + 3}.$$

Задача 14. Нека A , B и C са цели числа, такива че $(x - A)(x - 2) + 1 = (x + B)(x + C)$ е тъждество. Пресметнете $B + C$.

Задача 15. Намерете сбора на двуцифрените числа \overline{ab} и \overline{ba} , ако

$$600 < (\overline{ab})^2 - (\overline{ba})^2 < 700?$$

Задача 16. За кои цели числа $x < 10$ има само 2 прости числа, които делят $x^{2019} + 6x^{2018} + 9x^{2017}$?

Задача 17. За кои естествени числа n и $\frac{n+6}{n-1}$, и $\frac{3n+6}{2n-6}$ са цели числа?

Задача 18. По колко начина можем да разделим 9 деца на две групи – в едната да има 6 деца, а в другата – 3?

Задача 19. Нека x , y и z са естествени числа, такива че

$$|x - y| + |y - 1| + |z - 2| = 3.$$

Да се пресметне най-голямата стойност на $x + y + z$.

Задача 20. Намерете последната цифра на разликата

$$2015^{2019} - 2016^{2020}.$$